第 6 講・文字式の利用

例題 1　整数についての問題①

ポイント

n を整数とすると

- 連続する整数　：　$\cdots$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $\cdots$
- 連続する偶数　：　$\cdots$, $2n-2$, $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $\cdots$
- 連続する奇数　：　$\cdots$, $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $\cdots$
- 連続する 3 の倍数　：　$\cdots$, $3n-3$, $3n$, $3n+3$, $3n+6$, $\cdots$

問題

連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になることを説明しなさい。

解答

もっとも小さい整数を n とすると，連続する 3 つの整数は

n，$n+1$，$n+2$

と表せる。よって，それらの和は

$$\begin{aligned} & n+(n+1)+(n+2) \\ =\ & 3n+3 \\ =\ & 3(n+1) \end{aligned}$$

$n+1$ は整数だから，$3(n+1)$ は 3 の倍数である。したがって，連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる。

（説明終）

MEMO

確認テスト 1

連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になることを次のように説明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。

【証明】

もっとも小さい整数を n とすると，連続する 3 つの整数は

n， (1) ， (2)

と表せる。よって，それらの和は

$n+($ (1) $)+($ (2) $)=3($ (3) $)$

(3) は整数だから，$3($ (3) $)$ は 3 の倍数である。したがって，連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる。**（説明終）**

例題 2　整数についての問題②

問題

3 でわって 1 余る数と，3 でわって 2 余る数との和は 3 でわり切れることを説明しなさい。

ポイント

● 「連続する」などの指定のない 2 つの数 → それぞれ異なる文字を用いて表す

解答

m，n を整数とすると，3 でわって 1 余る数は $3m+1$，3 でわって 2 余る数は $3n+2$ と表せる。よって，それらの和は

$$(3m+1)+(3n+2)$$
$$=3m+3n+3$$
$$=3(m+n+1)$$

$m+n+1$ は整数だから，$3(m+n+1)$ は 3 の倍数である。したがって，3 でわって 1 余る数と，3 でわって 2 余る数との和は 3 でわり切れる。**（説明終）**

MEMO

確認テスト 2

3 でわって 1 余る数と，3 でわって 2 余る数との和は 3 でわり切れることを次のように説明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。

【証明】

m，n を整数とすると，3 でわって 1 余る数は (1)，3 でわって 2 余る数は (2) と表せる。よって，それらの和は

((1)) + ((2)) = 3((3))

(3) は整数だから，3((3)) は 3 の倍数である。したがって，3 でわって 1 余る数と，3 でわって 2 余る数との和は 3 でわり切れる。**（説明終）**

例題 3　2 けたの自然数に関する問題

問題

2 けたの自然数と，その十の位の数字と一の位の数字を入れかえてできた 2 けたの自然数との和は 11 の倍数になることを説明しなさい。

ポイント

- 2 けたの自然数 → 十の位を x，一の位を y として，$10x + y$ と表せる

解答

もとの自然数の十の位を x，一の位の数を y とすると，もとの自然数は

$$10x + y$$

十の位と一の位を入れかえてできた数は

$$10y + x$$

と表せる。よって，それらの和は

$$\begin{aligned}&(10x + y) + (10y + x)\\&= 11x + 11y\\&= 11(x + y)\end{aligned}$$

$x + y$ は整数だから，$11(x + y)$ は 11 の倍数である。したがって，2 けたの自然数と，その十の位の数字と一の位の数字を入れかえてできた 2 けたの自然数との和は 11 の倍数になる。**（説明終）**

MEMO

確認テスト 3

　2 けたの自然数と，その十の位の数字と一の位の数字を入れかえてできた 2 けたの自然数との和は 11 の倍数になることを次のように説明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。

【証明】
　もとの自然数の十の位を x，一の位の数を y とすると，もとの自然数は
　　(1)
十の位と一の位を入れかえてできた数は
　　(2)
と表せる。よって，それらの和は
$$(\boxed{(1)}) + (\boxed{(2)}) = 11(\boxed{(3)})$$
(3) は整数だから，11((3)) は 11 の倍数である。したがって，2 けたの自然数と，その十の位の数字と一の位の数字を入れかえてできた 2 けたの自然数との和は 11 の倍数になる。
(説明終)

例題 4　カレンダーの問題

問題

　右の図のように，カレンダーの中の 4 つの数を□で囲ったとき，囲まれた 4 つの数の和はつねに 4 の倍数になるわけを説明しなさい。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

ポイント

● いずれかの数を x などの文字でおき，カレンダー上の位置関係をもとに，それ以外の数を x を用いて表す。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

解答

囲まれた数のうちもっとも小さい数を x とすると，4 つの数は

$$x,\ x+1,\ x+7,\ x+8$$

と表せる。よって，それらの和は

$$\begin{aligned} & x+(x+1)+(x+7)+(x+8) \\ =\ & 4x+16 \\ =\ & 4(x+4) \end{aligned}$$

$x+4$ は整数だから，$4(x+4)$ は 4 の倍数である。したがって，囲まれた 4 つの数の和はつねに 4 の倍数になる。**（説明終）**

MEMO

確認テスト 4

右の図のように，カレンダーの中の 4 つの数を□で囲ったとき，囲まれた 4 つの数の和はつねに 4 の倍数になるわけを次のように説明したい。このとき，空欄 [(1)] ～ [(4)] を埋めなさい。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

【証明】

囲まれた数のうちもっとも小さい数を x とすると，4 つの数は

x，[(1)]，[(2)]，[(3)]

と表せる。よって，それらの和は

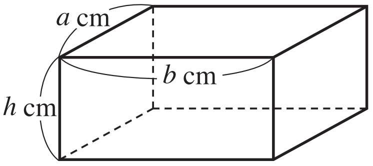
x + ([(1)]) + ([(2)]) + ([(3)]) = 4([(4)])

[(4)] は整数だから，4([(4)]) は 4 の倍数である。したがって，囲まれた 4 つの数の和はつねに 4 の倍数になる。**（説明終）**

例題 5　図形に関する問題

問題

右の図のように，縦 a cm，横 b cm，高さ h cm の直方体がある。



(1)　この直方体の体積を a，b，h を使って表しなさい。

(2)　縦，横，高さをそれぞれ 2 倍にすると，直方体の体積は何倍になるか答えなさい。

(3)　縦を 2 倍，横，高さをそれぞれ半分にすると，直方体の体積は何倍になるか答えなさい。

解答

(1)　$a \times b \times h = \boldsymbol{abh}$　**(cm³)**　**…(答)**

(2)　縦，横，高さをそれぞれ 2 倍にすると，縦 $2a$ cm，横 $2b$ cm，高さ $2h$ cm の直方体になる。よって，その体積は

$$2a \times 2b \times 2h = 8abh \quad (\text{cm}^3)$$

よって，もとの直方体の体積と比べると

$$8abh \div abh = 8$$

より，**8 倍**　**…(答)**

MEMO

⑶　縦を 2 倍，横，高さをそれぞれ半分にすると，縦 $2a$ cm，横 $\frac{1}{2}b$ cm，高さ $\frac{1}{2}h$ cm の直方体になる。

よって，その体積は

$$2a \times \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}abh \quad (\mathrm{cm}^3)$$

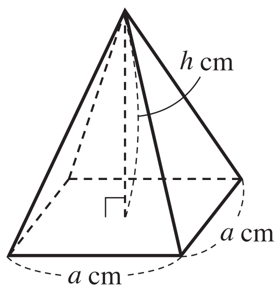
よって，もとの直方体の体積と比べると

$$\frac{1}{2}abh \div abh = \frac{1}{2}$$

より，$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **倍**　**…(答)**

確認テスト 5

右の図のように，底面が一辺の長さが a cm である正方形で，高さが h cm の正四角錐がある。



⑴　この正四角錐の体積を a，h を使って表しなさい。

⑵　底面の各辺の長さと高さをそれぞれ 2 倍にすると，正四角錐の体積は何倍になるか答えなさい。

⑶　底面の各辺の長さを半分にし，高さを 2 倍にすると，正四角錐の体積は何倍になるか答えなさい。